DISSERTATIO

MATHEMATICA

DE

CURVA FOCALI REGULARI

QUAM SCRIPSIT

EDMUNDUS KÜLP, HASSUS.

MANNHEMII, 1823.

TYPIS PTOÇHOTROPHÆI CIVICI.

PATRI DILECTISSIMO

FRIEDERICO KÜLP,

APUD NORDHEMENSES VERBI DIVINI MINISTRO,

NEC NON

AVUNCULO CARISSIMO

DANIELI ABEGG,

CIVITATI A CONSILIIS,

QUI IPSI ALTER EXSTITIT PATER

HASCE STUDIORUM SUORUM PRIMITIAS

GRATO AC PIO ANIMO

DICAT VOVETQUE

AUCTOR.

PRÆFATIO.

Celeberrimus Quetelet, non minus morum suavitate quam ingenii acumine insignis, in dissertatione doctissima, dum numerus quilibet planorum per punctum quoddam in cono recto situm agatur ad idem planum, quod punctum datum et axem coni contineat, perpendicularium, totidem orientur sectiones conicae, harum omnium sectionum focos in linea curva versari, invenit: quapropter hanc auctor eruditus recte nominat curvam focalem. Apparet simile quid evenire, si conus in cylindrum mutatur: nam cylindrus considerari potest tanquam conus, cujus vertex longinquitate infinita remotus est. Hoc verum recens repertum me excitavit ad proprietates curvae focalis regularis, id est, ejus quae intra cylindrum rectum generata est, excutiendas; quippe quae focali irregulari, i. e., ea quae intra conum rectum procreata est, simplicior reperitur. Eadem nobis dux viae esse potest, in proprietatibus posterioris examinandis. Propter hanc ipsam simplicitatem plus, quam irregularis, commodi afferre potest.

Haec paucis verbis praemittenda existimavimus ut, quod nobis, qui altiora ac subtiliora hujus disciplinae culmina vix adgressi sumus, exspectare licet, haec dissertatio virorum artis peritorum indulgentiam ac benevolentiam experiatur.

Haec scribens non potui, quin commemorarem, quantum acceptum viro celeberrimo referam Quetelet, cujus benignitas, aditum ad disciplinarum praestantissimam faciliorem mihi reddens, me maximarum obstrinxit gratiarum agendarum officio.

DISSERTATIO
DE
CURVA FOCALI REGULARI.

I.

Jam supponatur numerus ellipsium infinitus, plano per punctum A, in cylindro recto $D D E E$ situm, constanter acto perpendiculari ad idem planum, quod punctum A simulque axem cylindri $H' H$ contineat, generatarum, quarum omnium centra in axi cylindri versata sunt. Cujus vis enim ellipseos axis major, in plano $D' C A$ situs, rectam $H' H$ perpetuo secet necesse est, quoad ipsi parallelus non sit, et punctum intersectionis erit centrum ellipseos: nam triangula similia perpetuo nascuntur, uti v. g. sequentia $A' A C$ et $A G B$; sed est $A B = B C$, ergo $A G = A' G$; quapropter G erit centrum ellipseos, cujus axis major est $A' A$. Diameter minor cujus vis ellipseos erit $A C$ naturae cylindri causa. Sit circuli radius $B A$ pro unitate acceptus. Cognitis duabus diametris, constructio focorum jam nullius difficultatis esse potest. Quae de ellipsi singulari dicentur, eadem de omnibus etiam valebunt. Ut inveniantur foci J et U ellipseos, cujus axis est $A A'$, determinentur ex utraque parte centri G distantiae $G J$ et $G U$, æquales distantiae $G B$, ab eodem centro G ellipseos ad centrum B circuli $A C$. Similis constructio, cujuslibet ellipseos in qualibet positione consideratae focos determinabit.

II.

Aequatio nunc focorum loci omnium ellipseum quærenda est. Sint rectæ AY et $X'X$ ad sese perpendiculares ut coordinatarum axes spectatæ. Curva quæsita oritur ex intersectionibus continuis peripheriarum circuli variabilis cum variabili recta, uti v. g. intersectionibus axis ellipseos $A'A$ cum circulo BJU, quibus dabuntur foci J et U: harum vero linearum æquationes sequentes sunt,

$$y = ax - 1 \text{ et } r^2 = y^2 + (x - \alpha)^2;$$

littera a exprimitur tangens anguli BYA, quem diameter AA' cum abscissarum axi XX' format, et littera α designatur distantia a vertice G hujus anguli ad originem B coordinatarum; sed est $a = \frac{1}{\alpha}$, adeoque rectæ aequatio prodibit.

$$y = \frac{1}{\alpha} x - 1, \text{ unde sequitur } \alpha = \frac{x}{1+y}:$$

inde æquatio circuli formam hanc induet,

$$r^2 = y^2 + \left(x - \frac{x}{1+y}\right)^2, \text{ seu eliminato } r$$

$$\frac{x^2}{(y+1)}{}^2 = y^2 + \left(x - \frac{x}{y+1}\right)^2;$$ unde obtinebitur multiplicationibus factis æquatio curvae quæsitæ, cui nomen curvæ focalis regularis auctor maxime colendus Quetelet indidit ut eam, qua gaudet, proprietatem ipso nomine exprimeret: hæc æquatio erit:

$$y^2(y+1) + x^2(y-1) = 0 \;\ldots\ldots\; (A)$$

e qua prodibit:

$$x^2 : y^2 :: 1 + y : 1 - y,$$

id est, quadrata coordinatarum sunt inter se uti $(1+y)$ ad $(1-y)$ id est, uti distantiæ ab extremitate cujusque ordinatæ ad utrumque cylindri latus oppositum, quum de parte curvæ agitur, quæ super axi XX' versatur; posita y negativa, prodit $x^2 : y^2 :: 1 - y : 1 + y$, hæc quadrata erunt igitur inter se in eadem ratione inversa, quum de parte curvæ altera agitur, quæ infra axem XX' collocata est.

Habetur etiam proportio:

$$x : x' :: y\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} : y'\sqrt{\frac{1+y'}{1-y'}};$$

erunt igitur abscissæ inter se uti ordinatæ per quadratas radices multiplicatæ fractionum, rationem distantiarum ab extremitate cujusque applicatæ ad utrumque latus cylindri oppositum exprimentium.

III.

Resoluta æquatione (A) ratione x, elicitur

$$x = \pm\sqrt{y^2 \cdot \left(\frac{1+y}{1-y}\right)}:$$

cum duo valores x sibi invicem æquales, et diversis signis conspicui sint, curva modo pariter symetrico in utroque latere axis abscissarcm posita est. Si in æquatione (A) ponitur $x = o$, erit, $y^2\ (1+y) = o$; i. e. curva intersecat axem applicatarum in punctis B et A, et punctum B est punctum duplex. Pro $y = o$ suppeditat (A) $x^2 = 0$, id est axis abscissarum tangens ad focalem est in puncto B. Dum ponetur $x < MP$, ($MP = 0, 3$.. fere) tres valores applicatæ abscissæ cuidam respondentes reales erunt: Quum fit $x = MP$, duo valores applicatæ reperiuntur æquales: quum vero $x > MP$ ponitur, tum duo valores applicatæ imaginariæ erunt. Pro $x = \frac{\pm 1}{0}$, fit $y = 1$, conspicitur curvam sese non extendere ultra applicatam $y = \pm 1$, id est ultra puncta A et C: quod etiam prævidebatur.

Recta DCD', cujus æquatio est $y = 1$ et focalis nostræ duo crura in plagas oppositas infinite protensa tanto proprius ad se invicem continue accedunt, quanto magis producuntur, et tandem coïncidunt, cum abscissa est infinite magna, unde liquet curvam habere asymptoton DCD'. Applicata y ex data æquatione ad curvam sit in seriem quamdam reducta, *)

*) Traité du calcul différentiel et du calcul intégral par Lacroix, Tome 1.

eo citius convergentem quo major est abscissa x: non minus hæc series indicabit curvam unicam habere asymptoton DD' rectam.

IV.

Per punctum B rectæ cujusdam ductæ æquatio hanc formam habebit $y=ax$, et ea illius per punctum A ductæ formam sequentem induet $y=ax-1$. Hæ rectæ pro arbitrio ductæ, in puncto quolibet secare se possunt. Sed si punctam intersectionis in curva focali versari debet, necesse est harum æquationes cum illa focalis eodem tempore obtineant, id est, omnibus his satisfiat, oportet, valoribus x et y, qui in singulis æquationibus iidem sunt. Hæc hypothesis dabit duas æquationes inter duas variabiles quantitates, atque adeo unam quæ præter necessitatem reliquis adjungitur ad variabiles duas constituendas. Quare his variabilibus eliminatis ad æquationem, quæ eas non continebit, perveniemus, et cui satisfiat, oportet ut duæ rectæ in focali se invicem secare queant: apparet hanc æquationem fore inter quantitates a et a', quæ directiones rectarum constituent. Ad hanc obtinendam æquationem, tres æquationes hæ conjungendæ sunt.

$$y=ax.$$
$$y=a'x-1.$$
$$y^2(y+1)=x^2(1-y)$$

ita ut ex iis x et y pellantur. Duæ priores dabunt

$x=\dfrac{1}{a'-a}$; tertia vero formam sumet, si in locum y sufficitur ejus valor et factore communi x^2 dividitur

$$a^2(ax+1)=1-ax$$

quæ dabit

$a'=\dfrac{2a}{1-a^2}$; hæc æquatio indicat angulum quem recta per punctum A ducta cum axi abscissarum format, æqualem esse duplici angulo quem constituit recta per punctum B ducta cum axi eodem; posito has duas in focali se invicem secare. Manifestum est angulum inter duas has

rectas comprehensum æqualem esse ei, quem efficiuntur recta per punctum B ducta cum axi abscissarum. Quod etiam prævidebatur, est enim angulus $UBG=BUG$ atque angulus $GBJ=BJG$. Focalis quoque igitur, nulla ratione habita circuli variabilis BUJ, locus intersectionum rectarum omnium constanter per puncta A et B ductarum secundum legem quam exprimit formula $a=\frac{2a}{1-a^2}$, considerari potest.

V.

Si nunc jungentur puncta U et U' tum inter se, tum cum puncto A; orietur triangulum $AU'U$ inscriptum et æquilaterum, etenim applicatæ $y=\frac{1}{2}$ respondet $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$;
unde sequitur $UU'=\sqrt{3}$.

$$AU=AU'=\sqrt{(AB+BR)^2+(RU)^2}=\sqrt{3}.$$

Facile etiam patebit si radio BG circa B describitur circulus, junganturque rectis puncta intersectionis, J, J', G', L', L, G, polygonum $LL'G'J'JG$ futurum hexagorum regulare. Hoc theorema singulare et elegantissimum a magnifico Quetelet viro inventum, Dandelin accutissimus, militum, qui castra metantur, Belgicorum numero insertus, in libello qui inscribitur „memoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique“ academiæ Bruxellensi tradito etiam probabit præceptis geometricis, quæ ipse in animo creasse videtur.

VI.

Pro æquatione tangentis ad curvam sequentem ope calculi differentialis obtinetur

$$(y'^2+x'^2)(y-y')+2yy'(1+y')-2xx'(1-y')=0:$$

et pro illa normalis

$$y-y'=-\frac{3y'^2+2y'+x'^2}{2x'(1-y')}(x-x').$$

Tangentes ad curvam in puncto *B* angulum rectum formant, axes coordinatarum sunt hae tangentes. Si pro $y' = -\frac{1}{2}$ et $x' = \sqrt{\frac{1}{12}}$, ponitur in æquatione tangentis $x=0$ reperitur $y=1$, unde liquet rectas *CJ* et *CJ′* esse tangentes ad curvam. Quum erit $x' = +\frac{1}{0}$, æquatio tangentis $x'^2(y-y')=0$, adeoque $y=y'=1$; et jam notum erat asymptoton *DD′* in hac hypothesi esse abscissarum parallelam. Nec non sagacissimus Quetelet invenit focalem curvam præsertim singulari proprietate gaudere. Sit enim tangens ad punctum quodvis curvæ v. g. *UG′*; jungenturque puncta *A* et *U* recta *UA*, atque simul perpunctum intersectionis *J* sit *JJ′* ducta axi *XX′* parallela: si ad punctum *J′* construitur tangens *J′C*, duæ hæ tangentes se in focali constanter secabunt. Pro longitudine subtangentis obtinetur

$$y'\frac{dx'}{dy'} = x'.\frac{1+y'-y'^2}{(1-y'^2)};$$

Pro sub normalis longitudine invenitur

$$y'\frac{dy'}{dx'} = \frac{x'(1-y')^2}{1+y'-y'^2}.$$

In puncto *J′*, ubi $y' = -\frac{1}{2}$ et $x' = \sqrt{\frac{1}{12}}$,

obtinetur pro subtangenti $\sqrt{\frac{3}{18}} = \frac{AU}{18}$

et subnormali $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{1}} = \frac{3}{2}.\,AU$

VII.

Ut obtineamus æquationem polarem curvæ, consideremus radium vectorum ullum *BU*.

Triangulum *UBA* dabit

$1 : BU :: \sin BUA : \sin UAB$, unde

$$BU = \frac{\sin UAB}{\sin BUA} \text{ sed } \sin UAB = \cos BGA = \cos 2\,GBU,$$

GB est enim æqualis *GU* natura focalis causa. Si dicitur φ angulus quem *BU* cum axi abscissarum negativarum facit et iste radius vector littera ϱ exprimitur, erit

$$\varrho = \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} - 2 \sin \varphi,$$ si observatur

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi.$$

Ope hujus æquationis si φ *a* zero ad 45° crescit, radius vector positivus z dabit omnia puncta rami UB; sin autem φ *a* 45° ad angulum rectum crescit, omnia puncta rami $BJ'A$ radius vector negativus z dabit: si φ augetur ab angulo recto ad 135°, positivus z proferret puncta rami AJB; denique φ crescens ab 135° ad duos angulos rectos negativus radius vector z puncta omnia rami BU' constituet. Adeo integram curvam nostram ope æquationis polaris præcedentis angulus φ a zero ad duos tantum rectos angulos crescens determinabit. Sin autem cupiatur ut radii vectores positivi solum describant curvam nostram, necesse est, angulus φ crescat a zero usque ad quaternarium rectorum angulorum numerum.

VIII.

Si punctum A polus habetur et u repræsentat radium vectorem AU atque designat t angulum quem raduis vector AU cum axi applicatarum constituit, obtinemus $AU = AG + GU$, simulque $AJ = AG - UG$, sed $AG =$ sect t et $UG = BG =$ tang t, hisce valoribus elicitur pro æquatione alia polari focalis $u =$ sect $\pm$ tang t. Hac æquatione habetur quarta curvæ nostræ generatio. Observamus quantitate $\frac{udt}{du}$ exprimi tangentem anguli β quem format radius vector cum tangenti ad curvam erit ergo tang $\beta = \pm$ cost t. Hæc æquatio simplex offert constructionem elegantissimam geometricam. Subtangens, in coordinatas polares translata, idest, pars perpendiculæ in radium vectorem demissæ, inter punctum polare et id in quo tangens ad curvam hanc perpendiculam secat, exprimitur formula generali $\frac{u^2 dt}{du}$, atque hic erit $1 \pm \sin t$. Subnormalis autem, quæ ratione normalis eodem loco habenda est, quo subtangens ratione tangentis, cujusque valor $\frac{du}{dt}$ est, erit $\frac{\text{tang } t \pm \sec t}{\cos t}$, seu $\pm \frac{u}{\cos t}$

Hæ expressiones simplices subtangentis et subnormalis modos duos alios construendi geometrice tangentes ad focalem offerent.

IX.

Formula generalis pro determinando radio curvaturae in curvis ad coordinatas polares relatis, est

$$r = -\frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}}.$$

sed est æquatio curvæ focalis

$$\varrho = \frac{1}{\sin\varphi} - 2\sin\varphi\,;$$

e qua deducuntur

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - 2\cos\varphi$$

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{2\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi} + 2\sin\varphi\,,$$

his valoribus in formula præcedenti radii curvaturæ substitutis, omnibusque reductionibus convenienter effectis eruitur tandem

$$r = \frac{(1+4\cos^2\varphi\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{4\sin^4\varphi(1+2\cos^2\varphi)}.$$

Si in hac formula statuatur $\varphi = 45^\circ$, invenitur pro radio curvaturæ in puncto duplici *B*, $r = \sqrt{2}$; lateri ergo quadrati circulo *ASC* inscripti æqualis est hic radius curvaturæ. Nunc supponatur $\varphi = 90^\circ$, erit $r = \frac{1}{4}$. Formula radii curvaturæ nobis indicat, curvaturam ac magis diminuere, quo longius a puncto *A* seceditur, et tandem posito $\varphi = 0$, nullam esse; hac hypothesi enim obtinetur $r = \frac{1}{0}$.

X.

Quadratura curvæ obtinetur ope

$$Q = \tfrac{1}{2}\int \varrho^2\, d\varphi + C,$$

hæc, substituto in locum ϱ^2 ejus valore fit pro nostræ curva

$$Q = \tfrac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{\sin^2\varphi} - 4 + 4 \sin^2\varphi \right\} d\varphi + C,$$ et integratione facta

$$Q = -\frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi}\left(1 + 2\sin^2\varphi\right) - \varphi + C,$$ ubi C more solito constantem et φ arcum angulo φ correspondentem exhibet.

Pro $\varphi = 45°$ fit $Q = 0$, unde $0 = -1 - \frac{\pi}{4} + C$, ergo $C = 1 + \frac{\pi}{4}$;

adeoque $Q = 1 - \frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi}(1 + 2\sin^2\varphi) + \frac{\pi}{4} - \varphi$, ... (B) ubi π semiperipheriam circuli ASC exhibet.

Ut inveniantur spatium $BJ'AB$, ponendum est in æquatione præcedenti $\varphi = \frac{\pi}{2}$, unde erit $Q = 1 - \frac{\pi}{4}$; patebit igitur aream quæesitam $BJ'AB$ æqualem esse quadrato $BAS'S$ substracta quarta circuli parte ASC; unde sequitur hanc aream æqualem esse triangulo mixto (curvitate et rectitudine linearum conspicuo) $SS'AS$.

XI.

Subjunxi formulam quadraturæ, quam liberalitati ingeniosi inventoris focalis acceptam refero.

Secunda æquatione polari applicita, area Q quæ duobus radiis vectoribus includitur, expressa nascetur, est vero hæc: $Q = \frac{1}{2}\int u^2\, dt + C$, quæ si observamus $u = \sec t \pm \tan t$, fiet

$$Q = \int \sec^2 t\, dt \pm \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt - \tfrac{1}{2}\int dt + C,$$

unde integrando

$$Q = \tan t \pm \sec t - \frac{t}{2} + C,$$ seu

$$Q = \mp u - \frac{t}{2} + C\,.$$

Ut constitueretur valor constantis C, posuimus angulum $t=0$. Area respondens etipsa erit $=0$, it habebimus quia $u=1$,

$$0 = \mp 1 + C, \text{ undeliquet } C = \pm 1, \text{ et obtinebitur}$$

$$Q = \mp u \pm 1 - \frac{t}{2}$$

$$\text{si } u=0,\ Q = 1 - \frac{\pi}{4}\,,$$

exhibens pretium areæ AJB; quod concinit paragrapho præcedenti: omnino hoc integrale ducit ad geometricam constructionem attentione dignissimam, ex ipsa formula sequentem atque exponentem, aream inter AB et alium radium vectorem et arcum focalis, qui puncto B et eo quod constituetur radio vectore respondenti includitur, interjectam æquam esse differentiæ cujusdam rectanguli et certi sectoris. Etiam hinc concludere licebit, aream, quam ambiunt differentia radiorum vectorum eidem angulo respondentium, et duo arcus focalis, qui conjunguntur in puncto B et quorum duo puncta alia eodem radio vectore determinantur eamdem reperiri cum differentia rectangulorum commemoratorum.

XII.

Nunc ad nostræ curvæ rectificationem progradiamur. Calculus integralis pro determinando arcu in curvis ad coordinatas polares relatis, formulam sequentem proponit

$$z = \int \sqrt{\varrho^2\, d\varphi^2 + d\varrho^2} + C\,,$$

ubi C rursus constantem significat;
e qua orietur æquatio, substitutis in locum ϱ et in locum $d\varrho$ illorum valoribus, qui sunt,

$$\varrho = \frac{1}{\sin\varphi} - 2\sin\varphi\,,$$

$$\text{et } d\rho = -\left(\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + 2\cos\varphi\right) d\varphi\;;$$

$$z = \int d\varphi \sqrt{\frac{1+4\sin^2\varphi - 4\sin^4\varphi}{\sin^4\varphi}} + C : \text{seu}$$

$$z = \int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1+4\sin^2\varphi - 4\sin^4\varphi}} + \int \frac{4\,d\varphi}{\sqrt{1+4\sin^2\varphi - 4\sin^4\varphi}}$$
$$- \int \frac{4\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1+4\sin^2\varphi - 4\sin^4\varphi}} + C\,.$$

Ponendo $\sin\varphi = x$, erit $d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, evadetque hæc æquatio

$$z = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+3x^2-8x^4+4x^6}} + \int \frac{4\,dx}{\sqrt{1+3x^2-8x^4+4x^6}}$$
$$- \int \frac{4x^2\,dx}{\sqrt{1+3x^2-8x^4+4x^6}} + C\,.$$

Posita quantitate x^2 æquali variabili alteri y, hæc æquatio transformatur in sequentem

$$z = \int \frac{\frac{1}{2}\,dy}{y\sqrt{y+3y^2-8y^3+4y^4}} + \int \frac{2\,dy}{\sqrt{y+3y^2-8y^3+4y^4}}$$
$$- \int \frac{2y\,dy}{\sqrt{y+3y^2-8y^3+4y^4}} + C\,.$$

Jam tollimus dignitates impares sub radicali positas, quod fiet si sumimus $y = \frac{2u+1}{2}$, quod sumtum nobis dabit æquationem

$$z = \int \frac{\sqrt{2}\;du}{(1+2u)\sqrt{8u^4-6u^2+1}} - \int \frac{2\sqrt{2}\;u\,du}{\sqrt{8u^4-6u^2+1}} + \int \frac{\sqrt{2}\;du}{\sqrt{8u^4-6u^2+1}} + C\,;$$

seu

$$z = \int \frac{\sqrt{2}\;du}{(1-4u^2)\sqrt{8u^4-6u^2+1}} - \int \frac{2\sqrt{2}\;u\,du}{(1-4u^2)\sqrt{8u^4-6u^2+1}} - \int \frac{2\sqrt{2}\;u\,du}{\sqrt{8u^4-6u^2+1}}$$
$$+ \int \frac{\sqrt{2}\;du}{\sqrt{8u^4-6u^2+1}} + C\,. \quad \ldots\ldots(C)\,.$$

Tertia formula expressionum posterioris membri hujus æquationis haud difficulter integratur sequenti modo: ponendo $u^2 = \alpha$, erit

$$\frac{-2\sqrt{2}\;udu}{\sqrt{8u^4-6u^2+1}} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{8}}}\text{; sit æquatio}$$

$\sqrt{\alpha^2-\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{8}} = \alpha - r$, de qua deducuntur æquationes

$$\alpha = \frac{8r^2-1}{16r-6},\quad d\alpha = \frac{128r^2-96r+16}{(16r-6)^2}dr,\quad \alpha - r = -\frac{8r^2-6r+1}{(16r-6)},$$

hisce fit

$$\int -\tfrac{1}{2}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{8}}} = \int -\frac{4dr}{(3-8r)} = \tfrac{1}{2}\log(3-8r):$$

restituendo loco r ejus valorem $u^2 - \sqrt{1-6u^2+8u^4}$, provenit

$$\int\frac{-2\sqrt{2}\;udu}{\sqrt{8u^4-6u^2+1}} = \tfrac{1}{2}\log\left[3-8u^2+\sqrt{64u^4-48u^2+8}\right]:$$

Simili modo facillime invenitur quarta formula

$$\int\frac{-2\sqrt{2}\;udu}{(1-4u^2)\sqrt{8u^4-6u^2+1}} = -\frac{2}{8u^2+\sqrt{64u^4-48u^2+8}-2}$$

Hæc duo integralia restituendo loco u ejus valorem

$\frac{2\sin^2\varphi-1}{2}$, mutantur sic

$$\tfrac{1}{2}\log\left[3-2(2\sin^2\varphi-1)^2+4\sin\varphi\sqrt{4\sin^6\varphi-8\sin^4\varphi+3\sin^2\varphi+1)}\right]\ldots(D)$$

atque sic

$$-\frac{1}{(2\sin^2\varphi-1)^2-1+2\sin\varphi\sqrt{4\sin^6\varphi-8\sin^4\varphi+3\sin^2\varphi+1)}}\ldots(E).$$

Nunc ad integrationem primæ expressionum æquationis nostræ (C) redeamus: hæc vero est

$\sqrt{2}\int\frac{du}{(1-4u^2)\sqrt{8u^4-6u^2+1)}}$. Ad hoc integrale obtinendum, quantitatem sub radicali scriptum in factores ipsius dividimus, quo facto sequentem æquationem accipimus,

$$(8u^4-6u^2+1)=(1-2u^2)(1-4u^2).$$

Sint $2u=\sin\psi$, et $e^2=\frac{1}{2}$, unde $du=\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\psi}\,d\psi$, et formula nostra abibit in hanc

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}.$$

Differentiando quantitatem $\tang\psi\sqrt{1-e\sin^2\psi}$,. habetur æquatio posito $1-e^2=b^2$,

$$d(\tang\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi})=\frac{b^2d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}+\frac{e^2d\psi\cos^2\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}=$$

$$\frac{b^2d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}-\frac{b^2d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}+\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}\,d\psi,$$

unde æquatio evadet,

$$\frac{b^2d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}=d\left(\tang\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}\right)-\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}\,d\psi$$
$$+\frac{b^2d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}},$$

atque integrando multiplicandoque æquationem per $\frac{\sqrt{2}}{2b^2}$ obtinetur,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}=\frac{\sqrt{2}}{2b^2}\left(\tang\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}-E\right)$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\;\ldots\ldots(F):$$

si perpendimus integrale $\int d\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}$ significare longitudinem arcus elliptici, eamque littera E notamus *). Formula ultima æquationis (C) $\sqrt{2}\int\frac{du}{\sqrt{8u^4-6u^2+1}}$ pariter vertitur in hanc $\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin.^2\psi}}$.

---

*) Traité du calcul différentiel et intégral par Lacroix, Tome 2.

Propter quam igitur æquatio (C), propterque integralia (E), (D) et (F), hæc erit

$$z = C - \frac{1}{(2\sin^2\varphi - 1)^2 - 1 + 2\sin\varphi\sqrt{4\sin^6\varphi - 8\sin^4\varphi + 3\sin^2\varphi + 1}}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\log\left(3 - 2(2\sin^2\varphi - 1)^2 + 4\sin\varphi\sqrt{4\sin^6\varphi - 8\sin^4\varphi + 3\sin^2\varphi + 1}\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2b^2}\left(\operatorname{tang}\psi\sqrt{1 - e^2\sin^2\psi} - E\right) + \sqrt{2}\int\frac{d\psi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\psi}}.$$

Utentes observatione viri celeberrimi Lacroix functionem $\int\frac{d\psi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\psi}}$ exprimi duobus arcubus duarum ellipseum, inter quas quædam ratio intercedit, jam æquationem, quæ diximus præstantem quæramus.

Sint igitur duæ æquationes $e' = \frac{2\sqrt{e}}{1+e}$, $\sin(2\psi' - \psi) = e'\sin\psi$, hæc æquatio ad dignitatem secundam elata, primo dabit

$\sin^2(2\psi' - \psi) = e^2\sin^2\psi$, unde

$\cos^2(2\psi' - \psi) = 1 - e^2\sin^2\psi$, seu

$\cos(2\psi' - \psi) = \sqrt{1 - e^2\sin^2\psi}$; hæc æquatio de æquatione conditionis detracta, efficit, $\cos 2\psi' = \sqrt{1 - e^2\sin^2\psi}\cos\psi - e\sin^2\psi$; e qua, attentione ad formulam generalem mota

$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$, colligetur

$$2\cos^2\psi' = 1 - e\sin^2\psi + \cos\psi\sqrt{1 - e^2\sin^2\psi}$$

$$2\sin^2\psi' = 1 + e\sin^2\psi - \cos\psi\ \overline{1 - e^2\sin^2\psi}.$$

Singula harum duarum æquationum membra perse invicem multiplicando, atque quadratam radicem e duobus æquationis acceptæ membris eruendo, obtinebitur

$$2\sin\psi'\cos\psi' = \sin\psi\left(e\cos\psi + \sqrt{1 - e^2\sin^2\psi}\right).$$

Differentiando æquationem

$$2\sin^2\psi' = 1 + e\sin^2\psi - \cos\psi\sqrt{1 - e^2\sin^2\psi},$$

habetur omnibus reductionibus factis

$$2d\psi' = \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\left(e\cos\psi + \sqrt{1-e^2\sin^2\psi}\right),$$

tandem eadem æquatio dabit

$$\sqrt{1-e'^2\sin^2\psi'} = \frac{e\cos\psi + \sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}{1+e}.$$

Si jam per E' arcum ellipseos, cujus axis majoris dimidium æquale est 1, et excentricitatis quadratum e'^2, manifeste habebimus

$E' = \int d\psi' \sqrt{1-e'^2\sin^2\psi'}$: si in locum $d\psi'$ et in locum $\sqrt{1-e'^2\sin^2\psi'}$ valores supra inventi sufficiuntur, prodibit æquatio idem significans,

$$2(1+e)E' = \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\left(e\cos\psi + \sqrt{1-e^2\sin^2\psi}\right)^2 =$$

$$\int \frac{e^2\cos^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}} + 2e\sin\psi + E =$$

$$2E - b^2 \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}} + 2e\sin\psi, \text{ unde}$$

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}} = \frac{2}{b^2}\left(E - (1+e)E' + e\sin\psi\right);$$

unde liquet functionem $\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}$ exprimi posse arcubus duobus ellipseum E et E'. Valor arcus z valore functionis hujus substituto; declarabitur æquatione hac,

$$z = C - \frac{1}{(2\sin^2\varphi - 1)^2 - 1 + 2\sin\varphi\sqrt{4\sin^6\varphi - 8\sin^4\varphi + 3\sin^2\varphi + 1}}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\log\left[3 - 2(2\sin^2\varphi - 1)^2 + 4\sin\varphi\sqrt{4\sin^6\varphi - 8\sin^4\varphi + 3\sin^2\varphi + 1}\right]$$

$$+ \sqrt{2}\left[\operatorname{tang}\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi} + 4e\sin\psi + 3E - 4(1+e)E'\right] \ldots (G)$$

Constituemus constantem C conditione, qua arcus in puncto A incipitur, seu evanescit, quod congruum est naturæ curvæ. Constituitur angulus ψ relatione $\sin\psi = -\cos 2\varphi$ atque ψ' hac,

$\sin 2\psi' = \frac{1 + e\sin^2\psi - \cos\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}{2}$, hac hypothesi (G) erit, quippe $\varphi = 90^\circ$, $0 = C + \sqrt{2}\,(4e + 3E_{,} - 4(1+e)E'_{,})$, unde $C = \sqrt{2}\,\left(4(1+e)E'_{,} - 4e - 3E_{,}\right)$. $E_{,}$ notat valorem arcus respondentem angulo $\psi = 90^\circ$, id est valorem quartæ partis ellipseos, atque $E'_{,}$ significat valorem arcus E' respondentem angulo $\sin^2\psi' = \frac{1+e}{2}$.

Ergo (G) evadet

$$z = \sqrt{2}\,\left\{\tang\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\psi} - 4e(1-\sin\psi) + 3(E - E_{,}) + 4(1+e)(E'_{,} - E')\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log\left(3 - 2(2\sin^2\varphi - 1)^2 + 4\sin\varphi\sqrt{4\sin^6\varphi - 8\sin^4\varphi + 3\sin^2\varphi + 1}\right)$$
$$- \frac{1}{(2\sin^2\varphi - 1)^2 - 1 + 2\sin\varphi\sqrt{4\sin^6\varphi - 8\sin^4\varphi + 3\sin^2\varphi + 1}} \ldots (H).$$

Hæc æquatio nobis indicat arcum focalis exprimi functionibus circularibus, logarithmo et arcubus ellipseum duarum quarum axes majores sunt 2, atque minores $\sqrt{2} = CS$ (latus quadrati inscripti circulo AC), et $2\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 2\frac{AC - CS}{AC + CS}$.

XIII.

Si nunc curva focalis circum axem AY rotatur, area $AJBU$ procreavit in motu solidum cujus cubatura sequenti modo determinari potest. Quodque areæ elementum uti v. g. $PPM'M$ motu rotatorio circum AY solidum generat, quod cylindrum cujus altitudo PP', et cujus basis circulus, qui habet radium MP, consideratur. Ergo pro expressione cylindri hujus, si V exhibeat solidum, de quo agitur, obtinetur $dV = \pi x^2 dy$: ex æquatione autem curvæ generatricis habemus $x^2 = \frac{y^3 + y^2}{1-y}$, adeoque fit $dV = \pi\left(\frac{y^3 + y^2}{1-y}\right) dy$, cujus integrale completum est

$$V=\frac{\pi}{3}\left\{10-\left(6y+3y^2+y^3+6\log(1-y)\right)\right\}+C\ldots(J).$$

Constituta sit constans arbitraria conditione qua solidum simulque integrale evanescat posito $y=-1$. Unde prodit $C=\frac{\pi}{3}\left(6\log 2-14\right)$, ergo (J) evadet

$$V=\frac{\pi}{3}\left\{6\log\left(\frac{2}{1-y}\right)-\left(4+6y+3y^2+y^3\right)\right\}\ldots(K).$$

Posito jam in hac $y=0$ erit formula (K)

$$V=\frac{\pi}{3}\left(6\log 2-4\right)=\frac{\pi}{3}\ 0,1588832\ldots;$$

si observamus $\log 2=0,6931472$ in systemate, cujus basis est numerus notus e. Solidum igitur generatum per aream $AJ'BA$ fere æquat partem vigessimam quintam sphæræ cujus radius est 1. Si cognoscere velimus cubaturam solidi quod generat revolutione circumcirca axem AY area $MAM'M$, oportet, formulæ (K) subtrahamus quantitatem, quæ repræsentat cubaturam hujus partis solidi, quæ per triangulum MPA generatur; valor hujus solidi erit $\frac{\pi}{3}x^2(1-y)=\frac{\pi}{3}(y^3+y^2)$: cujus ope pro cubatura solidi generati per aream $MAM'M$ deducitur sequens

$$2\frac{\pi}{3}\left\{3\log\left(\frac{2}{1-y}\right)-(2+3y+2y^2+y^3)\right\};$$

e qua constat solidum tale æquale voluminium differentiæ duarum sphærarum dimidiarum quarum radii sunt duæ partes factoris secundi expressionis præcedentis.

XIV.

Subjungendam censui aliam formulam volumen solidi ejusdem exhibentem. Theorema Guldinii eximii pronuntiat solidi quod curvæ gignitur revolutione circum axem quandam, volumen æquipollere areæ generatrici multiplicatae peripheria, quam illius centrum gravitatis descripsit. Sit

BMM' elementum areae, O illius centrum gravitatis, cujus distantia ad axem erit $OL = -\frac{2}{3}\varrho\cos\varphi$; si recordamur centrum gravitatis trianguli esse in besse rectae ductae a vertice ad basis medium: in quo non negligendum est nobis proficiscendum esse a vertice. Volumen ergo generatum revolutione hujus areae parvulae erit $dV = -2\pi\frac{2}{3}\varrho\cos\varphi\frac{\varrho^2 d\varphi}{2}$, area parvula BMM' est enim $\frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi$.

Introducto pro ϱ ipsius valore $\frac{1-2\sin^2\varphi}{\sin\varphi}$, peractaque reductione obtinebimus

$$dV = \frac{2\pi}{3}\left\{\frac{6\cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi} + 8\sin^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi - \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}d\varphi - 12\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\right\}$$

cujus integrale conpletum est

$$V = \frac{2\pi}{3}\left\{6\log\sin\varphi + \frac{1}{2\sin^2\varphi} - 2\sin^2\varphi(\cos^2\varphi + 2)\right\} + C$$

Si $\varphi = 45°$ erit haec formula $0 = \frac{2\pi}{3}\left\{6\log\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}\right\} + C$,

unde $C = \frac{2\pi}{3}\left\{\frac{3}{2} - 6\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Restituendo loco C hunc valorem in formula praecedenti provenit,

$$V = \frac{2\pi}{3}\left\{6\log\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{\sin^2\varphi}\right) - 2\sin^2\varphi(\cos^2\varphi + 2)\right\} \ldots (L).$$

Ut obtineatur cubatura solidi, quod ab area $BJ'AB$ gignitur, ponendum est $\varphi = 90°$ in (L): hoc modo operatione facta, solidi quod cubatura, de quo queritur, erit $\frac{\pi}{3}0,1588829\ldots$, quae eadem plane est cum ea, quam dedit formula (K) in paragr. 12.

XV.

Centrum gravitatis solidi cujus superficies generatur per curvam focalem, dum circum axem AY revolvitur, necessario situm est in recta ipsa

A Y, quae est symetrice posita solidum respiciens. Problema igitur reducitur solum ad quaerendam applicatam *Y* centri gravitatis. Sit solidum homogeneum, ita ut eadem omnium partium densitas reperiatur; pondera igitur illarum proportionalia erunt voluminibus. Quodsi solidum dividitur in numerum infinite magnum partium infinite parvarum per plana perpendicularia ad axem *A Y*; et representatur littera *Y* distantia centri gravitatis solidi ad planum perpendiculariter ductum per punctum *B* ad axem *B A*, formula sequens determinabit hanc distantiam:

$$Y = \int \frac{x^2 y\, dy}{x^2\, dy}$$

si meminimus solidi momentum, ratione habita plani, aequare momentorum summam elementorum, et momentum solidi respecto plano, esse solidum multiplicatum distantia sui centri gravitatis ab hoc plano. Eliminando x^2 ope aequationis curvae focalis obtinetur

$$Y = \int \frac{y^4 + y^3}{1-y}\, dy : \int \frac{y^3 + y^2}{1-y}\, dy$$

integratione facta, constantibusque arbitrariis conditione determinatis, qua solidum evanescat in puncto *A*, habetur

$$Y = \frac{2 \log \left(\frac{2}{1-y}\right) - \left(\frac{y^4}{4} + \frac{2}{3} y^3 + y^2 + 2y + \frac{17}{12}\right)}{2 \log \left(\frac{2}{1-y}\right) - \left(\frac{y^3}{3} + y^2 + 2y + \frac{4}{3}\right)} \quad \ldots (M),$$

quae centrum gravitatis solidi nos exercentes docebit.

Si $Y = 1$ erit $Y = \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0}$; centrum gravitatis ergo solidi generati per aream infinitam non constitutum est: neque causa est cur centrum gravitatis solidi hujus prius in alio loco sit, quam in alio.

XVI.

Centro gravitatis constituto, quaestio sequens sponte sese offert, quae expressio declaret summam elementorum solidi legi se circum axem fixam rotandi subjecti, quorum singula quadratis intervallorum inter ipsa et axem interjectorum sunt multiplicata. Haec summa, plerumque nominata momentum inertiae, constituatur, necesse est, ad celeritatem angularum cognoscendam, qua solidum circum axem fixam fertur, quando ei quacunque arte tribuitur quaedam celeritas. Quare jam huic momento inertiae excutiendo operam demus. Sequemur ratiocinium illustris Poisson, quod ab ipso in opere „traité de Mecanique, inscripto datum, propter elegantiam atque simplicitatem repetimus.

Imaginemur solidum in annullos circulares, spissitudinis et latitudinis infinite parvarum divisum; quorum singulorum centrum est in axi AY, quique intra dua plana ad hanc axem perpendicularia comprehenduntur. Animo informemus unum horum annullorum; sint r radius interni et $r+dr$ ille externi circuli hujus annulli, ita ut dr sit latitudo annulli; dy erit illius spissitudo. Hic annullus manifesto est differentia duorum cylindrorum, quorum altitudo communis est dy, et qui radios habent r et $r+dr$; volumen illius igitur erit $\pi(r+dr)^2 dy - \pi r^2 dy = 2\pi r\,dr\,dy$, neglecta tertii ordinis quantitate infinite parva: massa annullo hujus erit $2\pi f r\,dr\,dy$, f significante solidi densitatem constantem. Quare momentum inertiae annulli, multiplicando massam ejus per r^2 erit $2\pi f r^3\,dr\,dy$; si integratur haec expressio ratione habita r et ab $r=0$ usque $r=x$, habebimus momentum inertiae segmentis solidi, de quo sermo est, et cujus spissitudo est dy, interjecti inter dua plana perpendicularia ad axem, id est, summam momentorum inertiae annullorum omnium comprehensorum duobus planis: effecta hac integratione, obtinebimus $\frac{1}{2}\pi f x^4\,dy$.

Aequatio curvae generatricis nobis dabit

$$x^4 = \frac{y^6+2y^5+y^4}{(1-y)^2};$$

si pretium hoc in locum x^4 in nostra formula sufficimus, prodit

$\frac{1}{2}\pi f\int\frac{y^6+2y^5+y^4}{(1-y)^2}dy$, quae expressio constituet momentum inertiae segmenti solidi spissitudinis finitae comprehensi duobus planis perpendicularibus ad axem *AC*. Integrando atque constituendo constantem conditione qua solemus, ita ut dicamus solidum evanescere puncto *A*, proveniet

$$\pi f\left\{\frac{y^5}{10}+\frac{1}{2}y^4+\frac{4}{3}y^3+3y^2+8y+\frac{1-y}{2}+10\log\frac{2}{1-y}+\frac{148}{30}\right\}.$$

En formulam quae exprimet momentum inertiae partis solidi generati area quadam *AMP*, rotando circum axem *AC*. Positiva semper illa erit, quaecunque sit y. Qui exitus exspectandus erat: est enim haec functio mere geometrica et inprimis positiva.

XVII.

Hoc fere modo quo paragr. 14. agentes, habebimus expressionem sequentem solidi V' generati area quadam circum axem abscissarum revoluta, $V'=\frac{2}{3}\pi\int\rho^3\sin\varphi\,d\varphi+C$, pro ρ posito ejus valore erit

$$V'=\frac{2}{3}\pi\int\left(\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}-6\,d\varphi+12\sin^2\varphi\,d\varphi-8\sin^4\varphi\,d\varphi\right)+C$$

$$V'=\frac{2}{3}\pi\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\left\{2\sin^4\varphi-3\sin^2\varphi-1\right\}-2\pi\varphi+C,$$

constituimus constantem hypothesi $V'=0$, si $\varphi=45^\circ$, atque ita habebimus $C=\frac{2\pi}{3}\cdot2+\frac{\pi^2}{2}$, hoc valore C novissimae formulae inserto, sequetur,

$$V'=\frac{2\pi}{3}\left\{2+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\left(2\sin^4\varphi-3\sin^2\varphi-1\right)\right\}+\pi\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\ldots\ldots(M).$$

XVIII.

Si dividimus solidum generatum revolutione areae cujusdam circum axem, area hac atque quantitate 2π, orietur distantia centri gravitatis hujus areae ab axe fixa. Quare dividentes formulam (*L*) formula (*B*)

et quantitate 2π, distantiam centri gravitatis hujus areae ab axi AY videbimus. Eodem modo dividentes formulam (N) formula (B) atque quantitate 2π, accipiemus distantiam centri gravitatis ejusdem areae ab axe abscissarum. Hoc modo centrum gravitatis ullius areae notum erit. Ut commodus hujus problematis sensus fundatur, probe notandum est, omnia puncta areae hujus aequis ponderibus onerata, seu acta viribus aequis et parallelis esse putanda.

XIX.

Jam facile solidum, quod gignitur revolutione areae cujusdam circum asymptoton CD expressum accipietur theoremate hoc. Nam $2\pi Q$ exprimet summam solidorum duorum generatorum revolutione areae Q, quae circum XX', deinde circum DD' axes rotatur, si area intra illas axes continetur: sin minus, $2\pi Q$ exprimet differentiam duorum horum solidorum.

Revera si a disantia centri gravitatis hujus areae ratione alterius harum axium habita, distantia ejus ab altera erit $1-a$: si sunt V' et V' solida generata eadem area circum duas axes, proveniet convenienter theoremati Guldinii $V'=2a\pi Q$ et $V''=2\pi(1-a)Q$, unde $V'+V'=2\pi Q\ldots(O)$ $Q.E.D.$

Si area Q invenietur in eadem plaga axium; distantiae centri gravitatis ab his axibus erunt, a et $1+a$, quo circa $V'=2a\pi Q$ et $V'=2(1+a)\pi Q$, unde $V''-V'=2\pi Q\ldots(P)$ $Q.E.D.$ Quodsi V' constituitur formula (N), constitui etiam V'' potest formula (O) aut (P).

XX.

Arcus elementarii centri gravitatis distantia ad axem AY exprimitur quatisate $-\varrho\cos\varphi$: superficies revolutionis parvula ipso generata erit ex lege Guldinii theorematis $dS=-2\pi\varrho\cos\varphi\sqrt{\varrho^2 d\varphi^2+d\varrho^2}$, valoribus notis pro ϱ et pro $d\varrho$ in hac formula introductis, et reductionibus factis habetur

$$dS=2\pi\frac{(2\sin^2\varphi-1)}{\sin^3\varphi}\sqrt{1+4\sin^2\varphi-4\sin^4\varphi}$$

haec aequatio integrationi facilior redditur, ponendo $\sin^2\varphi = u$; hoc modo obtinetur

$$dS = \pi\frac{(2u-1)\,du}{u^2}\sqrt{1+4u-4u^2},$$ cujus integrale completum est,

$$S = C + \pi\left\{\sqrt{1+4u-4u^2}\,\frac{1+2u}{u} + 8\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1+2u}}{\sqrt{\sqrt{2}+1-2u}}\right)\right\}$$

Restituendo loco u ejus valorem $\sin^2\varphi$; provenit

$$S = C + \pi\left\{\sqrt{1+4\sin^2\varphi-4\sin^4\varphi}\,\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} + 8\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1+2\sin^2\varphi}}{\sqrt{\sqrt{2}+1-2\sin^2\varphi}}\right)\right\} \ldots (Q).$$

Ponendo $S = 0$ pro $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, elicitur

$C = -\pi\left(4\sqrt{2}+2\pi\right)$, observando esse e notissima trigonometriae propositione

$$\text{arc}\,(\text{tang} = 1) = \frac{\pi}{4},$$

unde aequatio (Q) evadet

$$S = \pi\left\{\frac{1+2\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}\sqrt{1+4\sin^2\varphi-4\sin^4\varphi} + 8\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1+2\sin^2\varphi}}{\sqrt{\sqrt{2}+1-2\sin^2\varphi}}\right) - 4\sqrt{2} - 2\pi\right\} \ldots\ldots (R).$$

Sumendo in hac sin $\varphi = 90°$, obtinetur pro superficie generata a curva *BMA*

$$S = \pi \left\{ 3 + 8 \operatorname{arc} \left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \right) - 4\sqrt{2} - 2\pi \right\}.$$

XXI.

Superficies focali generata haberi potest in numerum zonarum latitudinis admodum exiguae infinitum divisa. Ea zona, quae elemento curvae *MM'* procreata est, conus abscissus putari potest, cujus bases, quarum radium nullo interjecto intervallo, alius alium sequitur, parallelae repetiuntur, et latus est elementum $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Superficies illius coni erit $2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2}$; multiplicando hane zonam per y, habetur $2\pi y x \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Integrando hane formulam inter limites convenientes, obtinetur summa omnium zonarum, multiplicatarum distantiis quae porriguntur a centro gravitatis ad planum perpendiculariter ad axem *BY* per punctum *B* ductum; quae summa aequet necesse est totam superficiem *S*, multiplicatam distantia *Y'* a centro gravitatis ad idem planum porecta secundum placitum Mechanices notum; id est superficies tota solidi, multiplicata distantia a centro gravitatis ad planum ullum versa, aequalis est summae elementorum omnium ejusdem superficiei multiplicatorum sua distantia quae a centro gravitatis ipsius ad idem planum pergit. Hoc modo habetur $Y' S = 2\pi \int xy \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Haec formula ope curvae generationis ad duas fractiones partiales, radicali $\sqrt{2 - y^2}$ conspicuas reducitur; quod ut evanascat, efficiemus transformatione simplici. Hoc pacto integratio postulata reducta fuerit ad eam fractionum rationalium partialium. Commodum ab hoc calculo sublatum non est aliud eo longitudinis et facilitatis. En causam cur suppresserim.

Ob eamdem causam quoque formulas, quae exprimunt momenta inertiae solidorum revolutione focalis circum axem XX' atque circum asymptoton DD' generatorum, omisi.

XXII.

Invenietur formula, quae constituet superficium S', focali circum axem XX' voluta generatam, modo eodem quo paragrapho 20. adhibito.

Theorema paragrapho 19. ostentum etiam ad superficies revolutionis pertinet. Quodsi S'' notat superficiem genitam revolutione arcus z circum asymptoton DD', prodibit

$$S' + S'' = 2\pi z$$
$$S'' - S' - 2\pi z$$

prout arcus z continetur intra axes, vel eadem plaga harum axium. Formula, quae S' dabit, constituta, facile una harum aequationum reperietur S', id est superficies revolutione arcus ejusdem circum asymptoton DD' nata.

XXIII.

Ex ipso theoremate Guldinii sequitur, ut habeamus distantiam centri gravitatis arcus, superficies arcu hoc se circum axes AY et XX' volvente effectas peripheriis quarum radius communis longitudo hujus arcus dividendas esse.

Formulae (B) et (R) et en quae dabit S' huic negotio inservient.

XXIV.

Subjungere volumus aequationem superficiei revolutionis circum axem AY.

Comprehendimus superficiem revolutionis prolatam motu circuli, cujus planum perpendiculariter stat in axe AY, centrum in hoc axe reperitur, et radius talis est qualis focalem semper secet. Omnis circulus, cujus planum parallelum est plano ordinatarum x et z, quod putatur ductum

perpendiculariter per punctum B ad axem BA, habet aequationes eas plani atque cylindri perpendicularis, seu $y=\alpha$, et $x^2+z^2=\beta^2$, posito $BP=\alpha$ et $PM=\beta$. Aequationes focalis sunt

$$\frac{y^3+y^2}{1-y}=x^2 \text{ et } z=0 .$$

Eliminando variabiles x, y, z, inter has quatuor aequationes, relatio inter α ct β, ad quam perveniemus, conditio erit qua hac curvae sibi invicem occurrunt. Haec aequatio erit $\frac{\alpha^3+\alpha^2}{1-\alpha}=\beta^2$; in quadam circuli positione ex α pendente.

Si in hac conditionis aequatione in locum β^2 sufficietur x^2+z^2 atque in locum α substituetur y, nanciscemur aequationem postulatam, quae est

$$\frac{y^3+y^2}{1-y}=x^2+z^2 .$$

Si $y=\alpha$, habetur $\frac{\alpha^3+\alpha^2}{1-\alpha}=x^2+y^2$, quae aequatio circuli invenitur cujus radius est $\sqrt{\frac{\alpha^3+\alpha^2}{1-\alpha}}$.

Si $y=0$, hic circulus reducitur ad punctum: si $y=1$, hic circulus exit in asymptoton.

XXV.

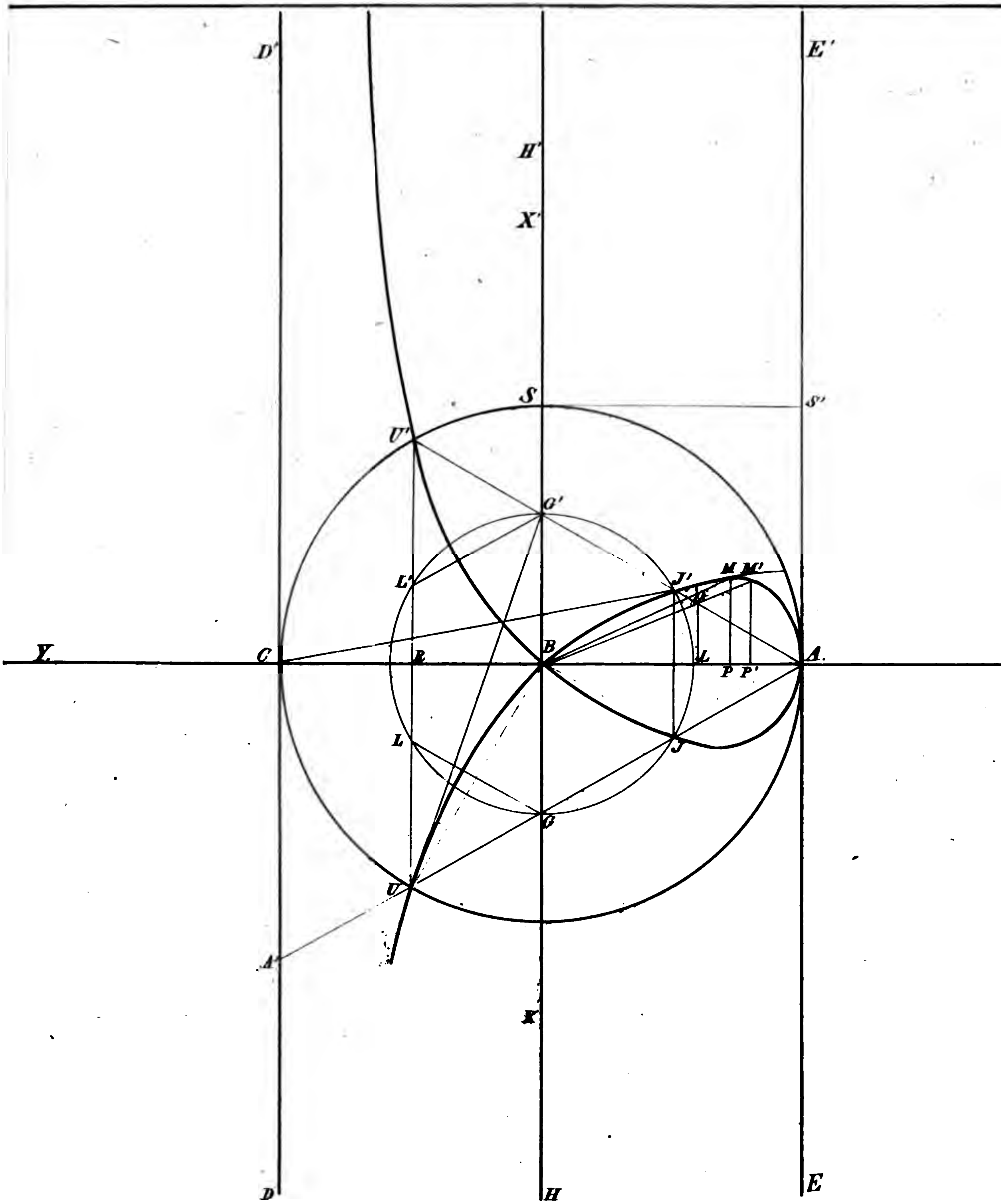
Primum postulatum, quod offertur, est ut planum tangens ad superficiem ducatur.

Aequatio plani tangentis est in universum

$$z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x)+\frac{dz}{dy}(y'-y) ,$$

z', x', y' designant coordinatas puncti ullius plani tangentis. In nostro casu erit

$$z'-z=-\frac{x}{z}\left(x'-x\right)+\frac{y}{z}\frac{-y^2+y+1}{(1-y)^2}(y'-y) .$$


D'
E'
H'
X'
S
S'
U'
G'
L'
J'
M
M'
Y
C
R
B
L
P
P'
A.
L
J
G
U
A'
X
D
H
E

Aequationis normalis erunt

$$x' - x - \frac{x}{z}\left(z' - z\right) = 0$$

$$y' - y + \frac{y}{z}\,\frac{-y^2 + y + 1}{(1-y)^2}\left(z' - z\right) = 0.$$

Prior harum aequationum etiam erit $z'x = zx'$, in qua legitur, projectionem in plano coordinatarum x et z per originem duci. Inde colligemus normalem axi AY obviam fieri: quod revera evenit in quavis revolutionis superficie.

Ea scientiae pars, quam Galli dicunt Géométrie descriptive *) nos etiam docet artem planum tangens ducendi virtute in planum tangens superficiei revolutionis comparatum cadente; qua est perpendiculariter erectum in plano ducto per axem revolutionis et punctum contactus.

Quando nobis proponimus planum tangens ducendum ad superficiem focalem per punctum extra superficiem situm cujus coordinatae datae sunt. Aequatio plani tangentis cum ea superficiei conjuncta constituet projectiones curvae, quae est locus omnium possibilium contactus punctorum. Quare postulatum non est definitum: quod etiam animadvertitur intelligendo planum tangens rotari continuo per punctum, quod datum est iens, ita ut non dessinat tangere superficiem. Hic motus generabit certum conum, cujus centrum punctum datum est et qui procreatus est linea recta, perpetuo perpunctum datum ire et semper superficiem tangere jussa. Solutio analytica problematis planum tangens ad superficiem nostram per rectam quae extra superficiem data est ducendi nullis difficultatibus obnoxia est. Ponamus enim punctum ullum in hac recta exstans, substituamus coordinatas hujus puncti in locum x', y', z' in aequatione plani tangentis, et habebimus aequationem quae nil continet nisi z, x, y coordinatas puncti contactus. Ficta conditionis aequatione ut data recta in plano

---

*) Géométrie descriptive par G. Monge.
Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes par Lacroix.
Géométrie descriptive par Vallée.